Formulario di Comunicazioni Elettriche

Gianluca Bertelli
gianluca.bertelli@gmail.com
www.gianlucabertelli.com
Versione 0.1

15 febbraio 2004

COMUNICAZIONI ELETTRICHE

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \tag{1}$$

$$Cn = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \tag{2}$$

Verificate le condizioni di Dirichelet, ogni segnale **periodico** può essere rappresentato come una serie infinita di coefficenti complessi (detti *coefficenti di Fourier*) calcolabili a partire da un periodo del segnale. Passo dallo studio nel dominio del tempo a quello nel dominio delle frequenze.
Altre forme:

$$\omega_0 = 2\pi f$$

$$C_0 = A_0 = \frac{1}{2} a_n$$

$$2C_n = A_n \cdot e^{-j\varphi_n} = a_n - jb_n$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_0 t - \varphi_n) \tag{3}$$

Forma vicina al significato fisico del segnale, valore medio del segnale più una moltitudine di sinusoidi.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\omega_0 t) \tag{4}$$

TRASFOMATA DI FOURIER (*funzioni aperiodiche*)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \tag{5}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{-j\omega t} d\omega \tag{6}$$

La trasformata di fourier serve a rappresentare i segnali **aperiodici**, applicata ad un segnale nel dominio del tempo ne individua un altro nel dominio delle frequenze (nella variabile *continua* ω). L'antitrasformata svolge l'associazione inversa.

$$V(\omega) = \frac{|X(\omega)|}{\pi}$$

$$\varphi(\omega) = arg\{X(\omega)\}$$

$$C_n = \frac{1}{T} X(n\omega_0)$$

DELTA DI DIRAC (δ)

$$< x, \delta >= x(0) = \lim_{\Delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f(t)_\Delta dt \tag{7}$$

$$\delta(f) = \lim_{\Delta \to 0} f_\Delta(t) \tag{8}$$

Il delta di dirac è una distribuzione che associa ad ogni funzione il suo valore nell'origine. La funzione $f(t)_\Delta$ si chiama ausiliaria. La trasformata di questa distribuzione è **uno**, inoltre è l'elemento neutro del prodotto di convoluzione. Rappresentazione di un segnale periodico mediante la funzione impulsiva:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau \tag{9}$$

TRASFORMATA DI FOURIER (*funzioni periodiche*)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot 2\pi\delta(\omega - n\omega_0) \tag{10}$$

Possiamo esprimere la trasformata di un segnale periodico come il prodotto tra un treno di impulsi (delta di dirac) e la sua trasformata di un solo periodo.

TRASFORMATA DI FOURIER DI UNA SERIE

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot e^{-jn\omega T} \tag{11}$$

$$x_n = \frac{T}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_s(\omega) \cdot e^{jn\omega T} d\omega \tag{12}$$

Una successione $x_n = x(nT)$ può essere ottenuta tramite campionamento in questo caso vale la seguente semplificazione:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega + k\omega_0) \tag{13}$$

TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER (DFT)

$$(N - upla)x_n = x_o, x_1, x_2..........x_{N-1} \tag{14}$$

$$X_q = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j2\pi \frac{n}{N} q)} \tag{15}$$

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} X_q \cdot e^{j2\pi \frac{n}{N} q)} \tag{16}$$

Definita per $q = 0, 1, 2.......N - 1$ e $n = 0, 1, 2.......N - 1$. Consiste in un approssimazione (grafico per punti) della trasformata del segnale, ha un andamento periodico con periodo N a cui corrisponde una frequenza $f_c = \frac{1}{T_c}$. Il calcolo risulta complesso quindi si usa un algoritmo semplificato chiamato trasformata di fourier veloce (**FFT**). Equivale a campionare nel dominio delle frequenze la trasformata del segnale, antitrasformando si ottiene la ripetizione periodica del segnale di partenza.

TEOREMA DI SHANNON (campionamento del tempo)

$$f_s \geq 2f_{max} \tag{17}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t - nT)}{\frac{\pi}{T}(t - nT)} \tag{18}$$

Secondo questo teorema è possibile ricostruire correttamente un segnale continuo, variabile nel tempo, da una serie di valori digitali discreti (campioni) quando questi sono stati presi con una frequenza di campionamento pari o superiore al doppio della massima frequenza contenuta nel segnale originale. Se non viene rispettata la condizione viene introdotto una sovrapposizione nello spettro del segnale (ALIASING).

SCHEMA

Applicando la trasformata continua di fourier:

Segnale temporale periodico $\longrightarrow$ trasformata discreta

Segnale temporale aperiodico $\longrightarrow$ trasformata continua

Segnale temporale discreto $\longrightarrow$ trasformata periodica

Segnale temporale continuo $\longrightarrow$ trasformata aperiodica

SEGNALI AD ENERGIA FINITA

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \tag{19}$$

Se l'integrale converge il segnale è a energia finita, è l'integrale della potenza istantanea ($|x(t)|^2$). Questi segnali ammettono la trasformata di Fourier.

Il prodotto interno di un segnale per la versione anticipata o ritardata di un altro segnale è detta **crosscorrelazione**, se i due segnali sono uguali viene chiamata **autocorrelazione**

$$\varphi_{xy} =< x, y_\tau >= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \cdot y(t + \tau)dt \tag{20}$$

$$\varphi_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \cdot x(t + \tau)dt \tag{21}$$

L'autocorrelazione calcolata nell'origine è l'energia del segnale.

SEGNALI A POTENZA FINITA

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \tag{22}$$

Se l'integrale converge ed è diverso da zero si dice che è un segnale a potenza finita. Non ammettono trasformata di fourier a meno dei segnali periodici. Le formule di auto e cross - correlazione ha una formulazione leggermente diversa, ma mantengono le stesse proprietà:

$$\dot{\varphi}_{xy} =< x, y_\tau >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t) \cdot y(t+\tau)dt \tag{23}$$

$$\dot{\varphi}_{xx} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t) \cdot x(t + \tau)dt \tag{24}$$

Per i segnali periodici in queste due formule non deve essere considerato eliminato il limite. L'autocorrelazione calcolata nell'origine è la potenza del segnale.

TEOREMA DI PARSEVAL GENERALIZZATO

Due segnali sono ortogonali lo devono essere anche le rispettive trasformate. Teorema alla base delle tecniche di multiplazione (TDM, FDM...)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)Y(\omega)d\omega \tag{25}$$

Condizione sufficente affinche due segnali siano ortogonali è che essi non si sovrappongano nel tempo oppure in frequenza.

TEOREMA DI PARSEVAL

$$E_x/P_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)X(\omega)d\omega \tag{26}$$

Non è nient'altro che il teorema di parseval generalizzato quando y(t)=x(t). Posso calcolare l'energia/potenza di un segnale sia nel dominio delle frequenze che nel dominio del tempo. Altra forma del teorema che lega l'energia/potenza all'autocorrelazione del segnale, sono gli spettri bilateri di potenza (G_x) e di energia (E_x):

$$F[\dot{\varphi(\tau)}] = |X(\omega)|^2$$

$$E_x/G_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F[\dot{\varphi(\tau)}]}{2\pi}d\omega \tag{27}$$

TRASFORMAZIONI LINEARI

Lo studio degli spettri di potenza ed energia (*analisi generalizzata di fourier*) ci da la possibilità di studiare una rappresentazione nel dominio delle frequenze anche per segnali che non ammettono la trasformata di fourier. Se trasformo un segnale attraverso una rete lineare valgono le seguenti proprietà:

$$E_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot E_x(\omega) \tag{28}$$

$$G_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot G_x(\omega) \tag{29}$$

MODULAZIONE DI PORTANTE SINUSOIDALE

$$s_0(t) = V_0 \cdot cos(\omega_0 t - \varphi_0) \tag{30}$$

Consiste nella variazione delle caratteristiche (ampiezza e fase) della portante sinusoidale (s_0) in base al segnale modulante Alcune grandezze significative:

$$s(t) = V(t) \cdot cos(\varphi(t)) \tag{31}$$

$$s(t) = V_0[1 + m(t)] \cdot cos(\omega_0 t + \alpha(t) - \varphi_0) \tag{32}$$

$$m(t) = \frac{V(t) - V_0}{V_0} \rightarrow \text{ Deviazione relativa di ampiezza}$$

$$\alpha(t) = \varphi(t) - (\omega_0 t - \varphi_0) \rightarrow \text{Devizione istantanea di fase}$$

$$\Delta\omega(t) = \dot{\alpha}(t) \rightarrow \text{Devizione istantanea di pulsazione}$$